INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Obras que integran el bloque 7 (*Cálculo diferencial*):

Módulo I
Introducción al Cálculo diferencial

Módulo 2
Límite de una función

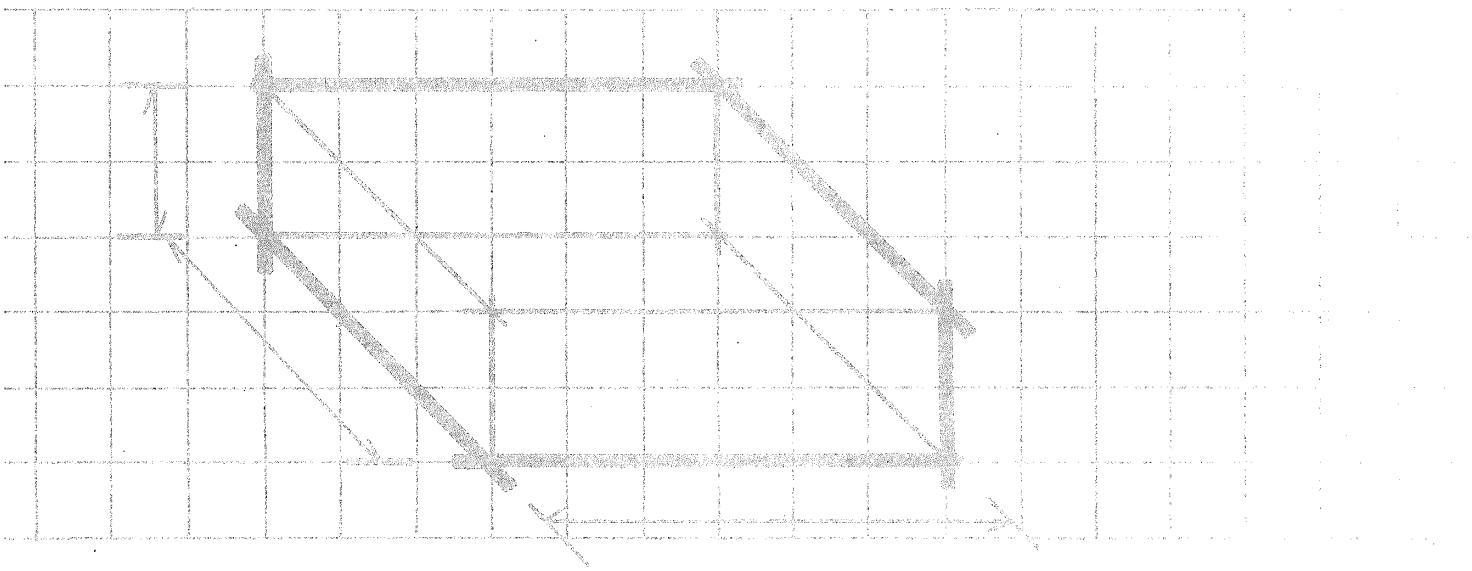
Módulo 3
Continuidad de una función

Módulo 4
Derivación de funciones algebráicas

Módulo 5
Derivación de funciones trascendentes

Módulo 6
Extremos de una función
(máximos y mínimos)

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

Bloque 7

Cálculo diferencial

Módulo 1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez,\03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, enero 1985
ISBN 968-24-0848-2

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir
el día 2 de enero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ELB KC 100

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

1.1 Un problema de optimización 9

1.2 Tangente a una curva 21

1.3 Noción de límite de una función 28

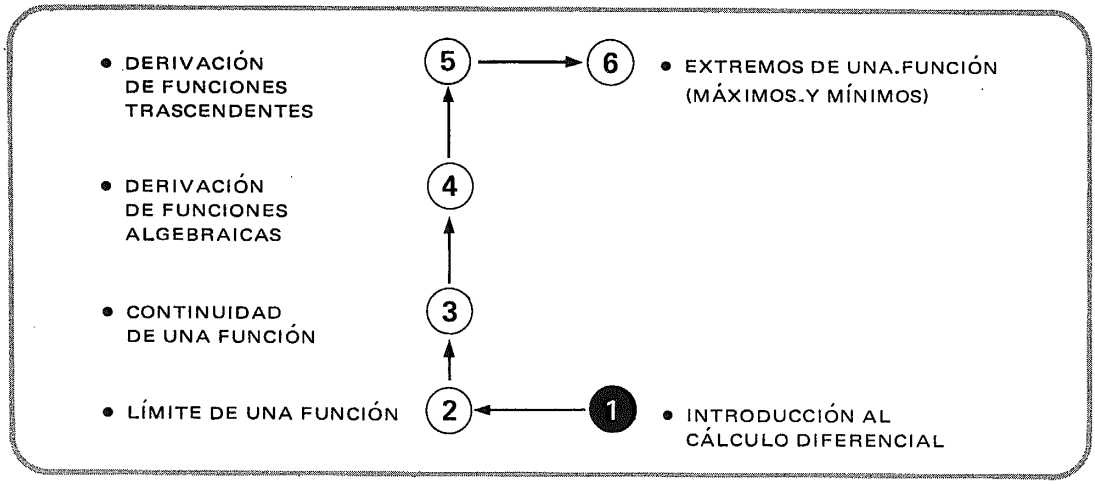
1.4 Pendiente y ángulo de dirección de una curva 42

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 7. Cálculo diferencial

Objetivos: derivar funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 7



Módulo 1. Introducción al cálculo diferencial

Objetivos: determinar para una función algebraica sencilla, una ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera, la pendiente de la curva en un punto dado, una ecuación de la tangente a la curva en un punto dado y la medida del ángulo de dirección de la curva en un punto dado, por el procedimiento llamado "de los cuatro pasos"

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Relación y función (concepto, elementos y representación gráfica)	2	7, 8
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
• Conceptos trigonométricos básicos	5	1, 3, 5, 6
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 6

1.1

Un problema de optimización

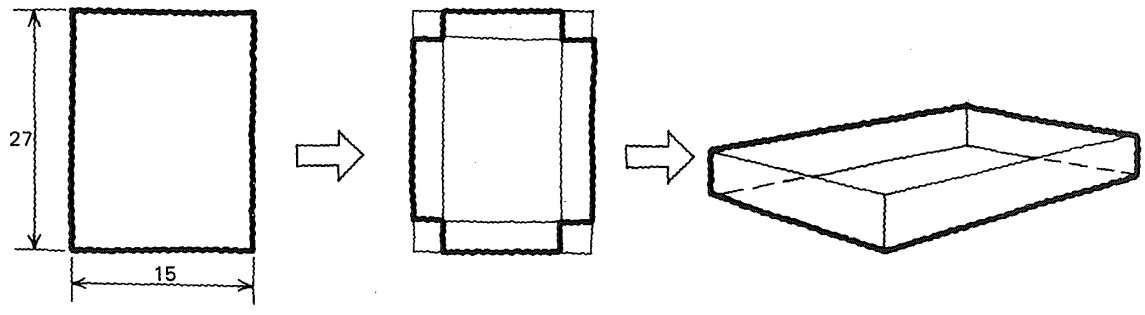
1

Un fabricante de cajas de cartón
nos presenta el siguiente **problema:**

Necesito hacer cajas abiertas,
utilizando trozos de cartón de 15 X 27 cm,
efectuando recortes de forma cuadrada
en las cuatro esquinas, y doblando
según se indica en la figura del cuadro siguiente.

Quiero saber
cuál debe ser la medida del lado del cuadrado recortado
para que el volumen de la caja sea máximo.

2

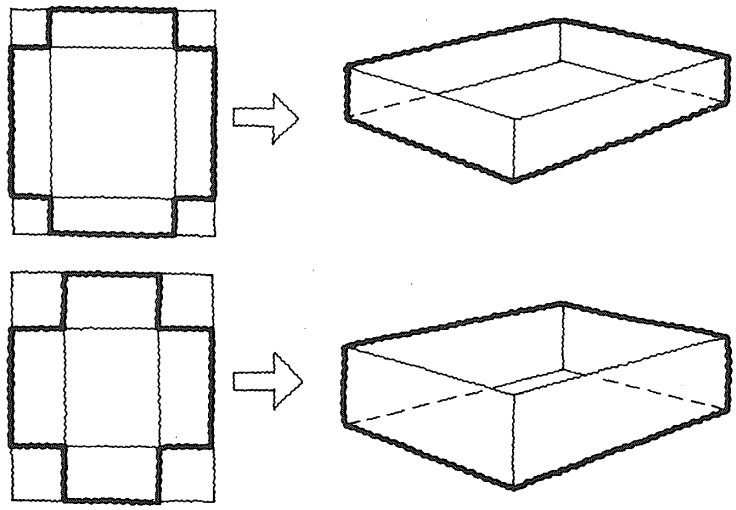


3

Por este procedimiento podemos obtener **cajas de diferente volumen** según la medida del lado del cuadrado recortado. Nos interesa la caja de **volumen máximo** que puede obtenerse del trozo de cartón considerado.

Véase cuadro siguiente.

4



5

Intentemos
resolver el problema
utilizando
nuestros conocimientos actuales.

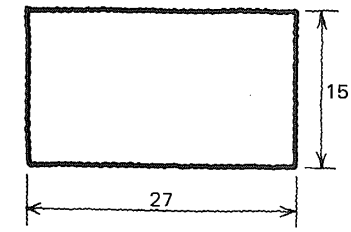
6

Empezamos por analizar la información dada en el enunciado.

Nos preguntamos,

¿cuáles son los datos?

→



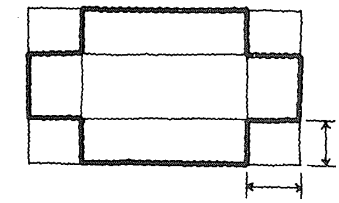
las dimensiones del trozo de cartón

15 X 27 cm

7

¿Cuál es la incógnita?

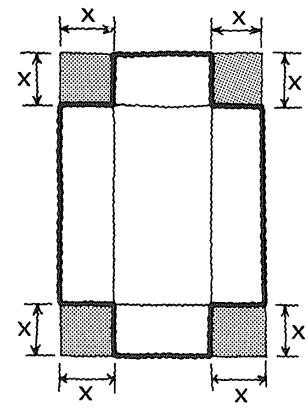
→



La medida del lado del cuadrado que es necesario recortar para obtener la caja de volumen máximo.

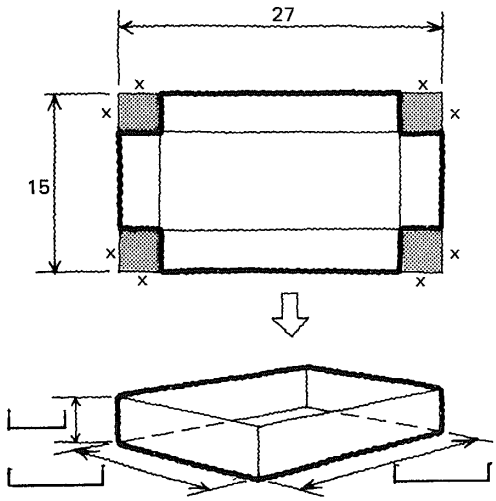
8

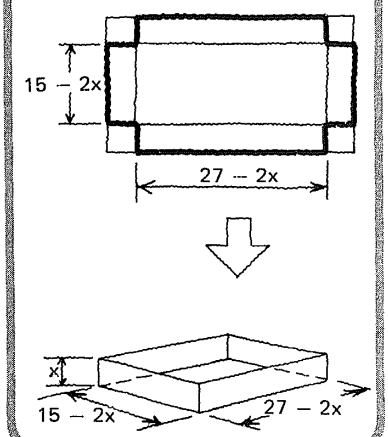
Llamemos **x** a la medida del lado del cuadrado por recortar.



9

Para expresar el volumen de la caja en función de x, empecemos por escribir las dimensiones de la caja en función de x.



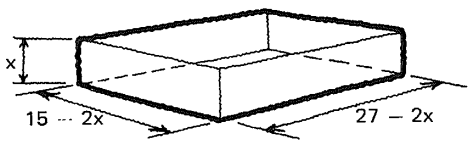


10

Si denotamos con V el volumen de la caja, podemos escribir

↓

$V = (15 - 2x)(27 - 2x)x$



11

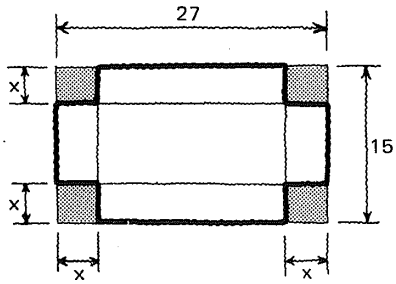
$V = (15 - 2x)(27 - 2x)x$

Establezcamos el

dominio de la variable x,

$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < \frac{15}{2}\}$

observando con atención la figura.

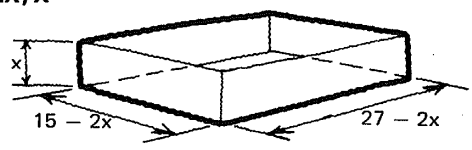


12

Sustituyendo para x algún
número real comprendido
entre 0 y 7.5 (éstos excluidos)
en la expresión

$V = (15 - 2x)(27 - 2x)x$

obtenemos
un volumen
para la caja.



Por ejemplo:

para $x = 5$

$V =$ [_____] cm^3

$V = [15 - 2(5)][27 - 2(5)]5$
$V = (15 - 10)(27 - 10)5$
$V = 5 \cdot 17 \cdot 5$

425

13

Nuestro problema
consiste,
ahora,
en averiguar

para qué valor de x

el volumen **V es máximo.**

14

Lo primero que se nos ocurre
es
dar valores a **x,**
calcular los correspondientes
valores de **V**
y
observar los resultados.

15

Completemos, entonces, la siguiente tabla:

Valores de x incluidos para referencia, aunque no pertenezcan al dominio.

x	V = (15 − 2x)(27 − 2x)x
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
7.5	

x	V
0	0
1	325
2	506
3	567
4	532
5	425
6	270
7	91
7.5	0

16

El valor máximo obtenido para el volumen, es

└──────┘

para x = └──┘.

Ahora bien, ¿estamos seguros de que éste es el máximo volumen posible para la caja?

Sí/No Porque └──────┘

x	V
0	0
1	325
2	506
3	567
4	532
5	425
6	270
7	91
7.5	0

567

3

● No
no hemos considerado más que unos cuantos del infinito número de sustitutos permisibles para la variable x

17

Observemos que la expresión

$$V = (15 - 2x)(27 - 2x)x$$

es la regla de correspondencia de una **función** que podemos escribir así:

└──────────────────────┘

Por ejemplo:

$$\{(x, V)/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 7.5 \wedge V = (15 - 2x)(27 - 2x)x\}$$

18

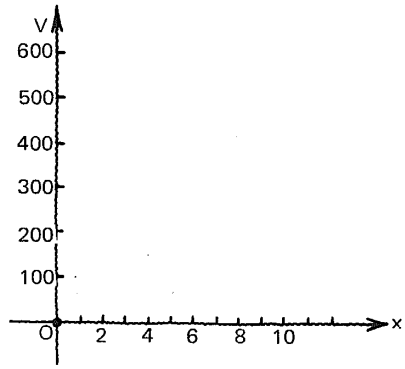
Vamos, ahora,
a representar
en el plano cartesiano
los pares ordenados (x, V)
que hemos obtenido,
y
que corresponden
a la función

$$\{(x, V)/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 7.5 \wedge V = (15 - 2x)(27 - 2x)x\}$$

Véase cuadro siguiente.

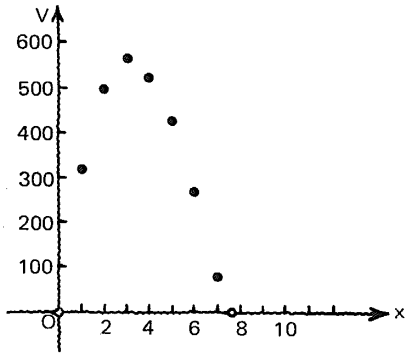
19

x	V
0	0
1	325
2	506
3	567
4	532
5	425
6	270
7	91
7.5	0



Respuesta
en el
cuadro siguiente

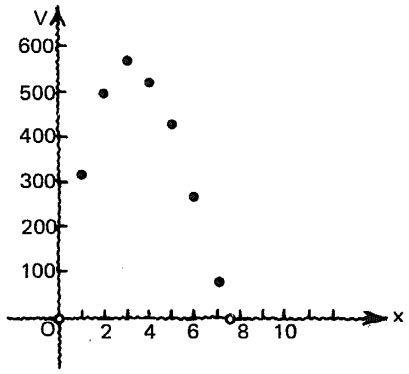
Esta representación
gráfica nos permite
ver las cosas en
forma más clara.



20

No estamos todavía seguros
de que el volumen máximo

se obtiene cuando x = 3,
pero
parece razonable suponer
que
para algún número real
cercano a 3
el volumen de la caja
es máximo.



21

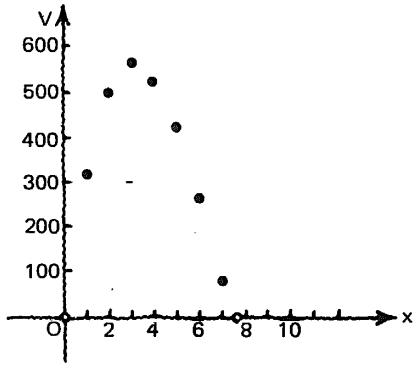
Por ejemplo:

para x = 2.9 obtenemos:

V = ⌊_____⌋

para x = 3.10 obtenemos:

V = ⌊_____⌋



• 565.616

(valor un poco menor que
el correspondiente a x = 3)

• 567.424

(valor un poco mayor que
el correspondiente
a x = 3)

22

Por medio de
este procedimiento de
sucesivos tanteos
podríamos llegar a
aproximarnos al valor de x
que hace que
el volumen de la caja sea máximo.

El valor aproximado de x así obtenido
podría bastarnos
desde el punto de vista práctico.

23

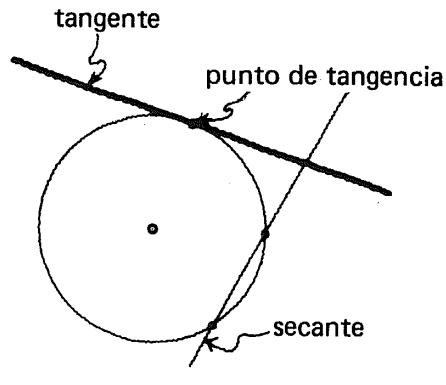
Sin embargo,
nos interesa
un
procedimiento
para
determinar
la **solución exacta**
de éste
y
de otros problemas semejantes.

24

El procedimiento buscado
tiene que ver con
la determinación
de la **tangente a una curva**
en un punto dado.

25

En un estudio anterior
hemos definido
una **tangente a una**
circunferencia
como
una recta
que
interseca a la circunferencia
en un punto único,
a diferencia
de una **secante,**
que la interseca
en dos puntos.

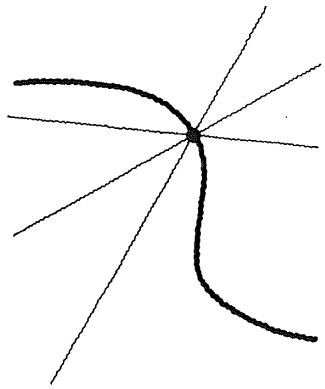


26

La definición anterior
no nos va a servir
cuando
nos refiramos
a la
tangente
a una curva cualquiera.

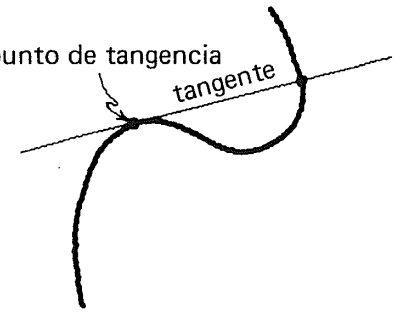
27

Por un punto cualquiera
de
una curva, como la mostrada,
podemos trazar
un número infinito de rectas
que no serán
consideradas como tangentes
a pesar de intersecar
a la curva en un punto único.



28

Por otro lado,
la recta
que vamos a definir
como
tangente a la curva
en un punto dado,
puede
intersecar a dicha curva
en
más de un punto,
como podemos verlo
en la figura.



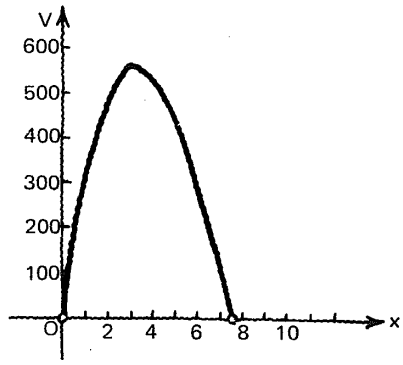
29

Esta es la curva correspondiente a la función definida por la ecuación

$$V = (15 - 2x)(27 - 2x)x$$

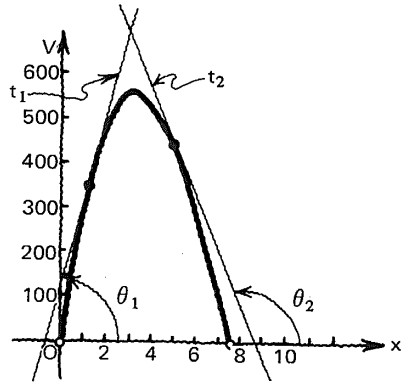
$$0 < x < 7.5$$

que nos da el volumen de la caja del problema que hemos venido considerando.



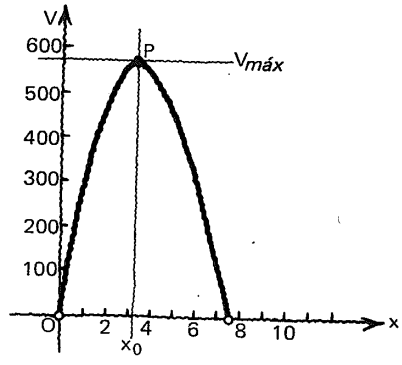
30

Por un punto cualquiera de esta curva será posible trazar una tangente, la cual tendrá un cierto ángulo de inclinación.



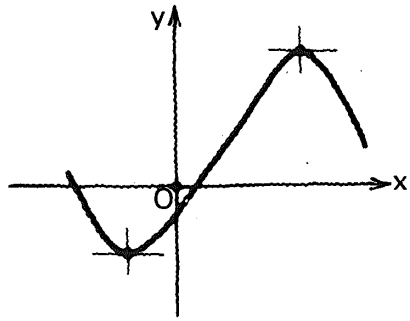
31

Podemos intuitivamente ver que: existe un punto (P) de la curva en el que la tangente es horizontal y que: para la abscisa (x_0) correspondiente a ese punto la función alcanza su valor máximo.



32

La determinación de estos puntos, en que una cierta función adquiere su valor máximo (o mínimo), en un intervalo determinado, será **uno de los principales objetivos** del estudio de esta rama de la matemática conocida como **cálculo diferencial.**



7.1.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* con sus propias palabras y valiéndose de los elementos gráficos necesarios, la importancia que tiene el estudio de las tangentes de una curva y de los puntos en que una función adquiere su valor máximo (o mínimo) en un intervalo dado.

1.2

Tangente a una curva

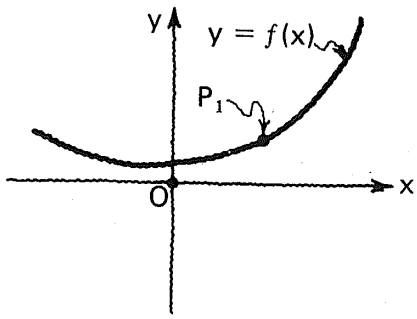
33

Consideremos
una función
definida por la ecuación

$y = f(x)$

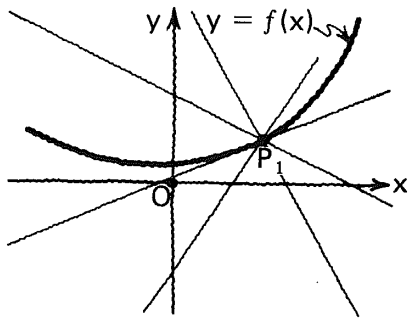
y
un punto $P_1 = (x_1, y_1)$
perteneciente a ella.

Supongamos que
la curva mostrada
es la representación gráfica
de tal función.



34

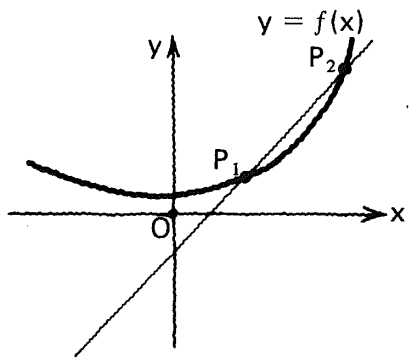
Trataremos de
determinar cuál de
las rectas que pasan
por P_1 será definida
como la tangente
a la curva $y = f(x)$
en el punto P_1.



35

Consideremos otro punto (P_2) perteneciente a la curva y una recta que contiene a P_1 y a P_2.

Esta recta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ no es, desde luego, una tangente a la curva, sino más bien lo que en algún lugar hemos definido como:

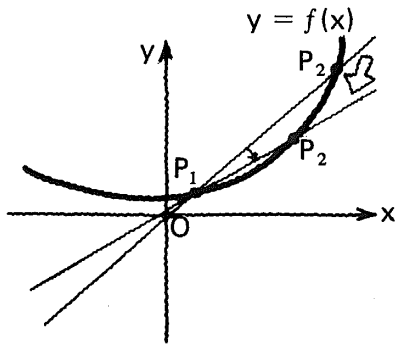


secante

36

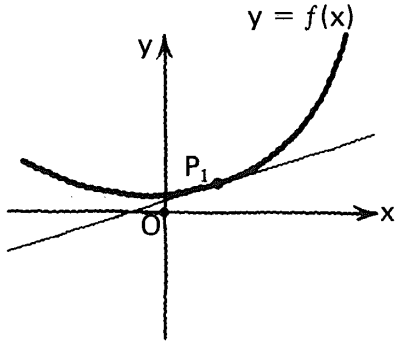
Ahora, imaginemos que el punto P_2 se desplaza a lo largo de la curva, acercándose a P_1, que permanece fijo.

Observamos que la secante $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ gira alrededor de P_1



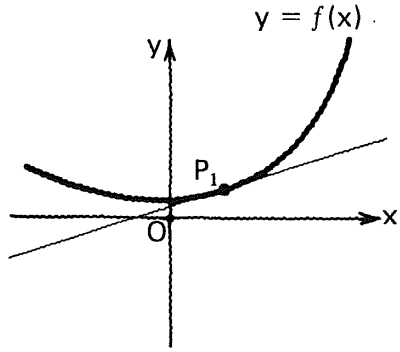
37

La posición "límite" que adopta la secante $\overleftrightarrow{P_1P_2}$, como resultado de este desplazamiento de P_2 hacia P_1 es lo que definimos como **tangente a la curva** $y = f(x)$ en el punto P_1.



38

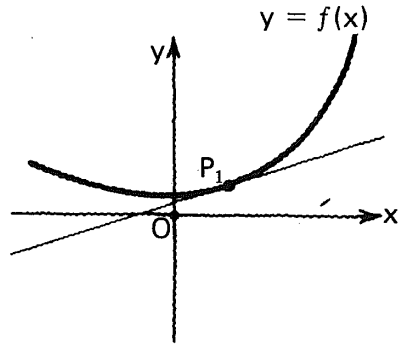
Ahora,
nos interesa conocer
una **ecuación**
de esta **tangente.**



39

Recordemos que
es posible establecer
una ecuación para
la recta que pasa por un
punto dado,
si conocemos
su pendiente.

Si el punto es $P_1 = (x_1, y_1)$,
y la pendiente **m**,
una ecuación de la recta
sería:



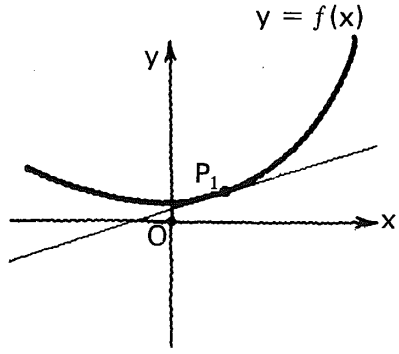
$y - y_1 = m(x - x_1)$

40

Nuestro problema
se reduce,
entonces,
a encontrar la

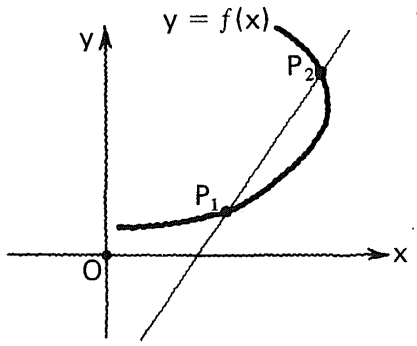
pendiente

de la recta tangente
que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$.



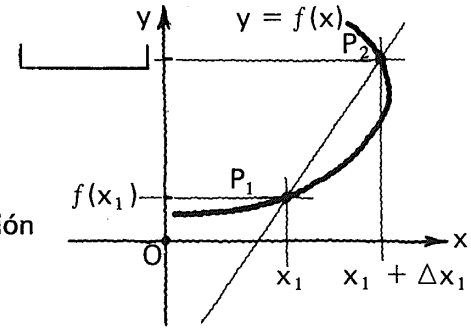
41

Empezaremos
por determinar
la pendiente
de la secante $\overleftrightarrow{P_1P_2}$.



42

Llamemos Δx_1
("delta equis uno")
a
la abscisa de P_2
menos la abscisa de P_1,
y completemos la rotulación
de la figura.

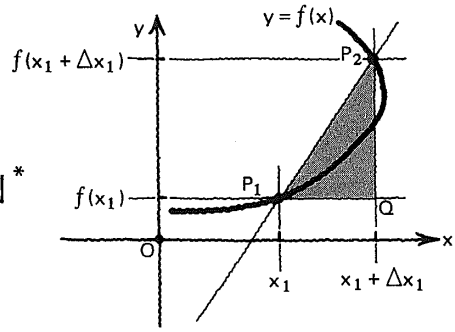


$f(x_1 + \Delta x_1)$

43

En el triángulo P_1P_2Q:

$|\overrightarrow{QP_2}| =$ [ ]*

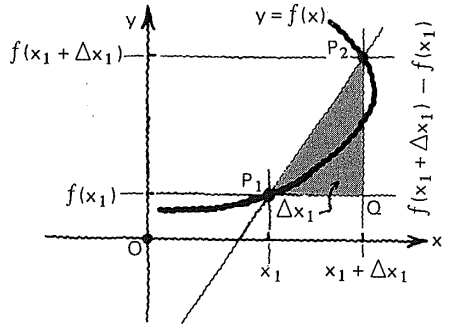


$f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)$

* Debemos entender: "la medida del segmento dirigido QP_2".

44

Estamos en condiciones de escribir una expresión para la pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{P_1P_2}$



$$\frac{|\overrightarrow{QP_2}|}{|\overrightarrow{P_1Q}|} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

para $\Delta x_1 \neq 0$

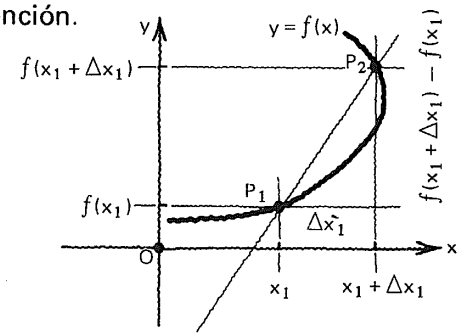
45

Estudiemos con atención.

Pendiente de la secante $\overleftrightarrow{P_1P_2}$

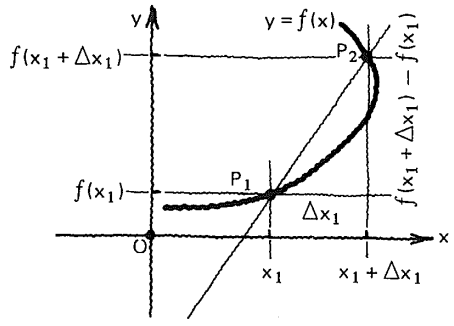
$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

$\Delta x_1 \neq 0$



46

Si hacemos que P_2 se aproxime a P_1, la secante "tiende a convertirse" en la tangente a la curva en P_1. En estas condiciones, Δx_1 se aproxima a [ ] y la pendiente de la secante $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ se aproxima a [ ]



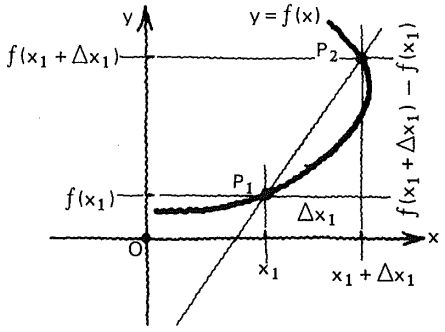
0 (cero)

la pendiente de la tangente a la curva en P_1

47

Decimos que:

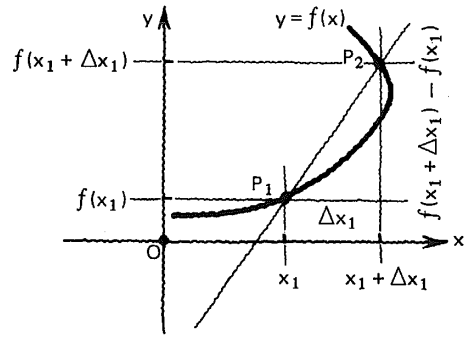
La pendiente de la tangente a la curva en P_1 es igual a el **límite** *de la pendiente de la secante $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ cuando Δx_1 tiende a cero.*



48

Simbólicamente:

$$\underbrace{m(x_1)}_{\text{pendiente de la tangente a la curva } y = f(x) \text{ en } x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \underbrace{\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}}_{\text{pendiente de la secante } \overleftrightarrow{P_1 P_2}}, \quad \Delta x_1 \neq 0$$



49

Para poder evaluar la expresión

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

para una función dada, es necesario familiarizarnos un poco con la idea de

límite.

7.1.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la expresión:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}$$

para la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto dado (x_1, y_1).

1.3

Noción de límite de una función

50

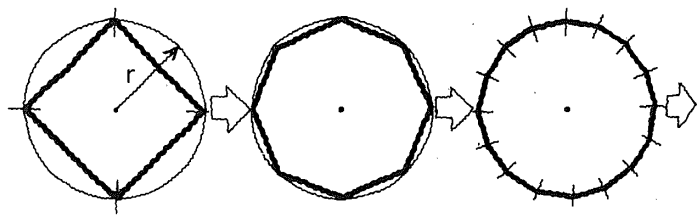
En otros momentos
de nuestro estudio
hemos utilizado
la noción de

límite.

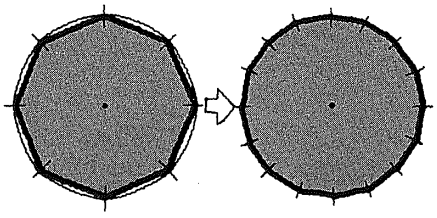
51

Por ejemplo,

para encontrar el **área de un círculo** de radio **r**,
hemos partido de la idea de considerar
una sucesión de polígonos regulares convexos
de creciente número de lados,
inscritos en una circunferencia de radio r.



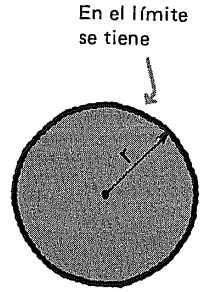
52



Podemos observar que
a medida que el número de lados aumenta,
el área del polígono
se aproxima al área del círculo.

53

Decimos que:
el área de un círculo de radio r
es igual a
el límite del área de un polígono
regular convexo de n lados,
inscrito en una circunferencia de radio r,
cuando n tiende a infinito
(es decir, cuando el número de lados
se vuelve mayor que cualquier número entero,
por grande que éste sea).



54

Si denotamos con
A el área del círculo de radio r
y con
A(n) el área del polígono inscrito de n lados,
podemos escribir:

$$A = \lim_{n \to +\infty} A(n)$$

usando la simbología que hemos introducido
anteriormente.

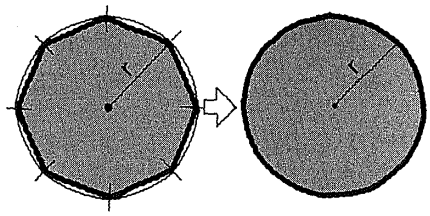
55

Debemos observar
este hecho curioso.

Aumentar el número de lados del polígono
a través de una sucesión como ésta:

4, 8, 16, 32, 64, 128,...

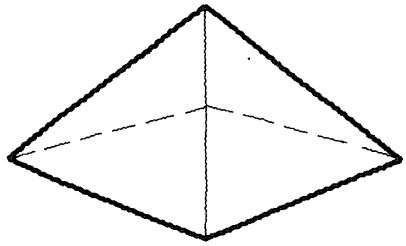
es "un proceso sin límite".



Sin embargo,
el límite de las áreas de los polígonos es
un número bien definido para un valor dado
de r.

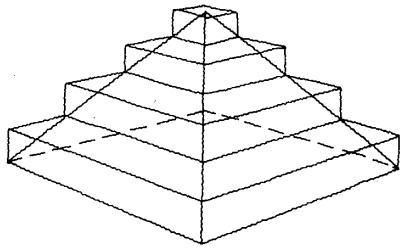
56

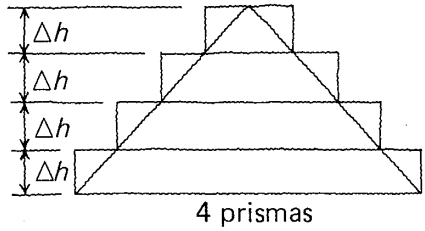
Utilizando la misma idea,
podríamos encontrar,
por ejemplo,
el volumen de una
pirámide de base cuadrada,
como
se sugiere
en los siguientes
cuadros.



57

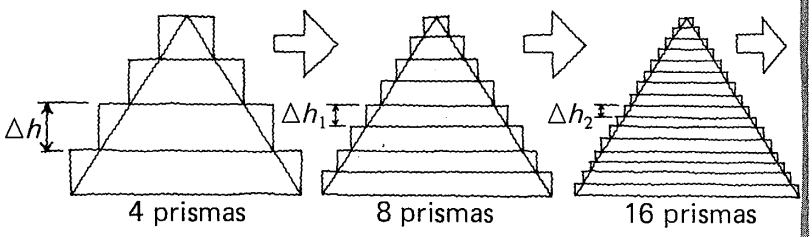
Una burda aproximación
del volumen de la
pirámide
la obtenemos
sumando
los volúmenes
de los
prismas
de altura Δh
y
base variable.





4 prismas

58



Sin embargo,
a medida que el número de prismas aumenta,
nos aproximamos más y más
al volumen de la pirámide.

59

Diremos que,
el **volumen de la pirámide**
es igual a:

el límite
de la suma de los
volúmenes de los prismas
cuando el número de
éstos tiende a $+\infty$
o
cuando la altura de cada
uno de ellos tiende a cero

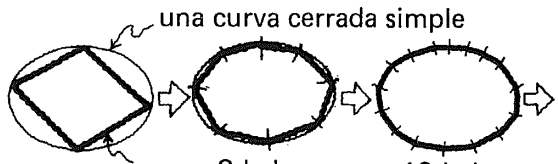
7.1.3.1

Práctica adicional.

Proporcionar otros ejemplos
de situaciones
en que
una cierta medida
es obtenida
como
el límite de una sucesión,

si se considera necesario.

60



polígono inscrito de 4 lados

8 lados

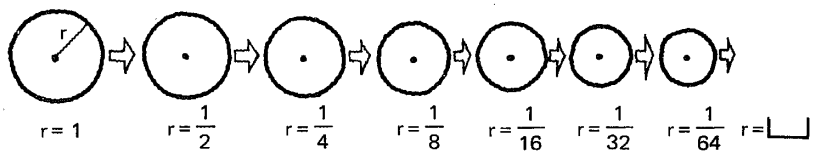
16 lados

¿Podríamos decir
cuál es el límite de esta sucesión de perímetros?

infinito número de lados

El perímetro de la curva cerrada simple.

61

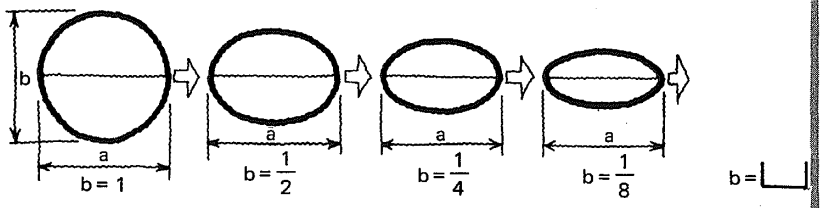


El límite de esta sucesión de circunferencias es

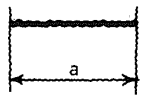
0

un punto

62



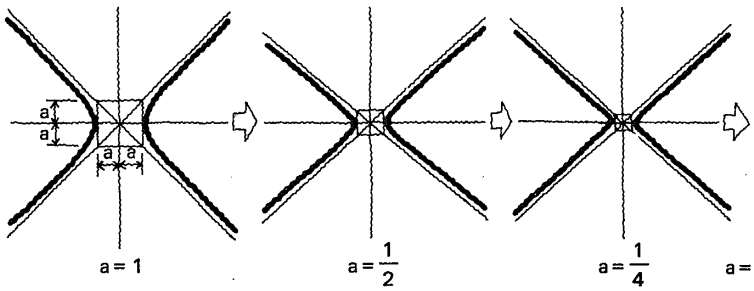
El límite de esta sucesión de elipses es:



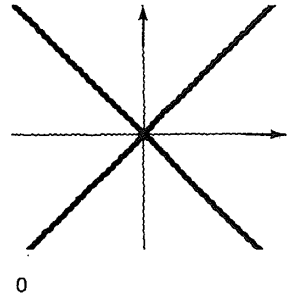
0

un segmento de recta de longitud a

63



El límite de esta sucesión de hipérbolas equiláteras es:



un par de rectas concurrentes

64

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots \quad \underline{\qquad}$$

El límite de esta sucesión de números es: ⌴

$$\frac{1}{+\infty}$$

aceptaremos este símbolo, aunque debemos tener presente que $+\infty$ no representa un número.

0 (cero)

65

$$1, \frac{1}{0.1}, \frac{1}{0.01}, \frac{1}{0.001}, \frac{1}{0.0001}, \frac{1}{0.00001}, \ldots \quad \underline{\qquad}$$

El límite de esta sucesión de números es: ⌴

$$\frac{1}{0}$$

Diremos que tal sucesión "no tiene límite", hecho que simbolizaremos así:

$+\infty$

66

0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333,...

El límite de esta sucesión de números es: ⌊_____⌋

$\frac{1}{3}$

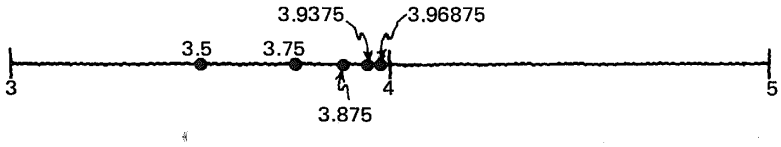
67

0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,...

El límite de esta sucesión es: ⌊_____⌋

$+\infty$ (es decir, no tiene límite)

68



3, 3.5, 3.75, 3.875, 3.9375, 3.96875,...

El límite de esta sucesión de números es: ⌊_____⌋

4

7.1.3.2

Práctica adicional
de determinación intuitiva
del límite de una sucesión
de números,
si se considera necesario.

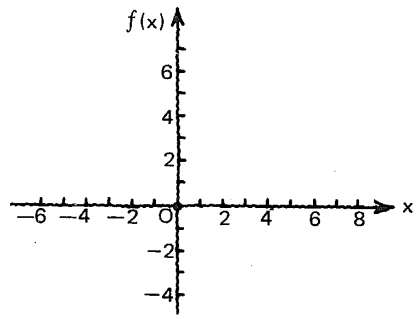
69

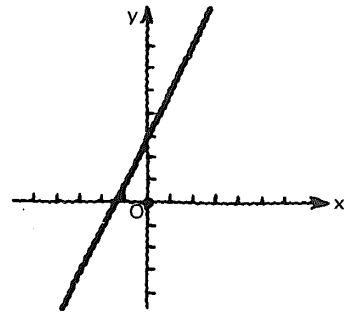
Consideremos, ahora,
la función definida por:

$f(x) = 2x + 3$

cuya gráfica es...

(completarla).



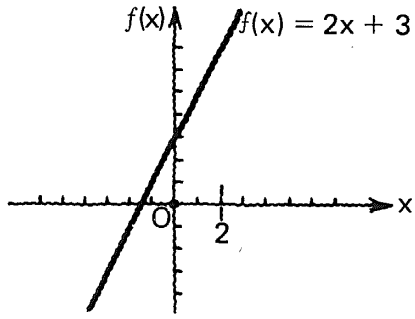


70

Nos preguntamos
cuál es
el límite de $f(x)$
cuando x tiende a 2.

Simbólicamente:

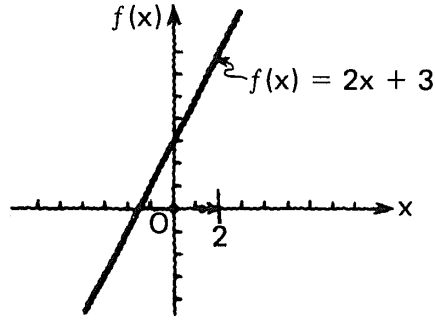
$\lim_{x \to 2} 2x + 3 = ?$



No se da respuesta.

71

Acerquemos la variable **x**
a su límite
2,
por la izquierda,
a través de la sucesión:
1.9, 1.99, 1.999, 1.9999,...
y
veamos lo que pasa
con $f(x)$.



Véase cuadro siguiente.

72

$f(x) = 2x + 3$

Completar:

x →	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999
$f(x)$→						

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$f(x) = 2x + 3$

x →	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999
$f(x)$→	6.8	6.98	6.998	6.9998	6.99998	6.999998

Observamos que:

a medida que **x** se aproxima a 2
por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a [ ]

7

73

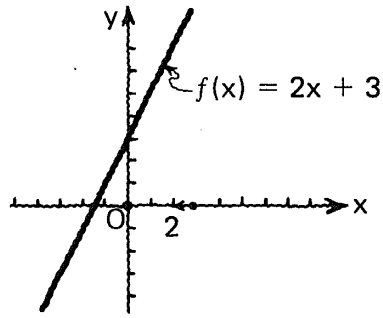
Ahora,
acerquemos la variable **x** a su límite 2,

por la derecha,

a través de la sucesión:

2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ...

y
observemos
el comportamiento
de $f(x)$.



74

$f(x) = 2x + 3$

Completar:

2.000001	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1	←x
						←$f(x)$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$f(x) = 2x + 3$

2.000001	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1	←x
7.000002	7.00002	7.0002	7.002	7.02	7.2	←y

A medida que **x** se aproxima a 2,
por la derecha,
y se aproxima a [ ]

7

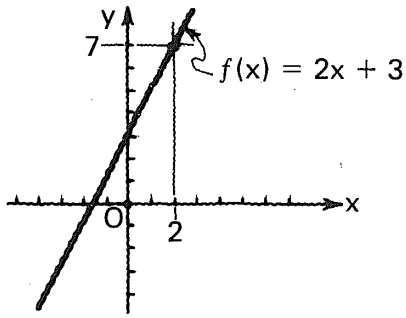
75

Parece razonable aceptar que:

$\lim_{x \to 2} 2x + 3 = 7$

observando, al mismo tiempo, que:

$\lim_{x \to 2} 2x + 3 = f(2)$



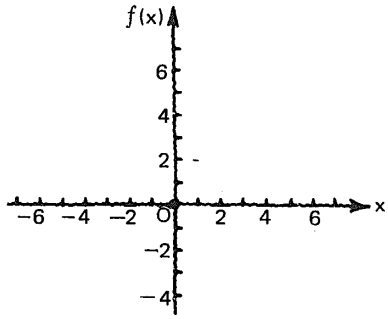
76

Se requiere determinar

$\lim_{x \to 0} x^2 + 3$

empezando por trazar la gráfica de

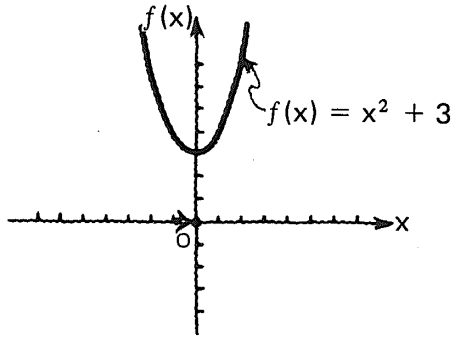
$f(x) = x^2 + 3.$



Respuesta en el cuadro siguiente

Hagamos tender **x** a → **0**, por la izquierda, a través de la sucesión:

− 0.1, −0.01, −0.001,



x	−0.1	−0.01	−0.001
$f(x)$	3.01	3.0001	3.000001

Observación:

A medida que x se aproxima a cero por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 3.

77

$f(x) = x^2 + 3$

Por la derecha:

				← x
				← $f(x)$

Observación: [ ]

Por ejemplo:

0.001	0.01	0.1	x
3.000001	3.0001	3.01	$f(x)$

A medida que x se aproxima a cero, por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 3.

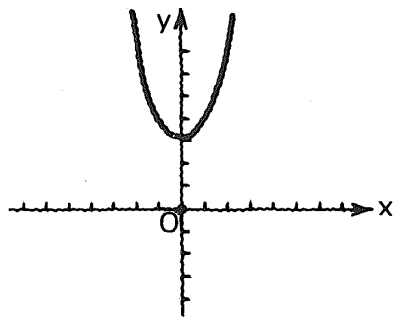
78

Podemos intuitivamente concluir que:

$\lim_{x \to 0} x^2 + 3 = 3$

y puesto que $f(0) = 3$

$\lim_{x \to 0} x^2 + 3 = f(0)$



79

Cuando menos para algunos casos, se verifica que:

$\lim_{x \to a} f(x) =$ [ ]

$f(a)$

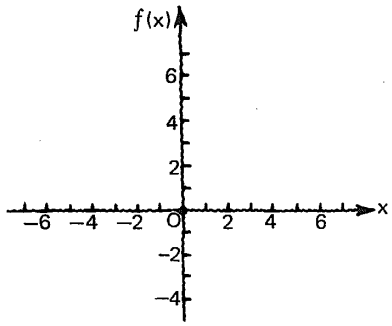
80

Se requiere determinar:

$\lim_{x \to 2} 5$

Tracemos la gráfica correspondiente a

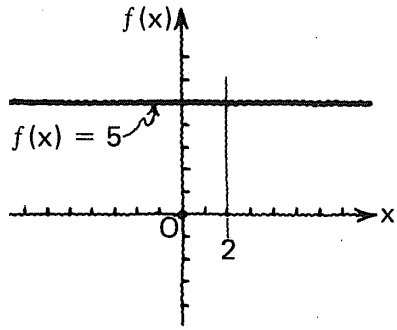
$f(x) = 5.$



Respuesta en el cuadro siguiente

Si hacemos tender a x, por la derecha o por la izquierda, hacia 2, el valor de $f(x)$ permanece constante e igual a [____] por lo que parece razonable aceptar que:

$\lim_{x \to 2} 5 =$ [____]



5

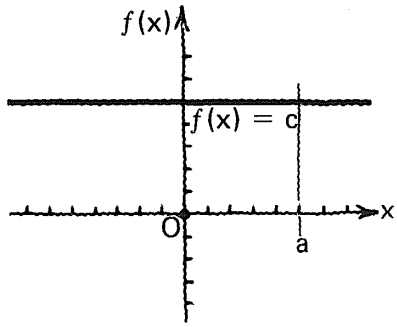
5

81

Vamos a aceptar que:

$\lim_{x \to a} c = c$

siendo c una constante cualquiera ($c \in \mathbb{R}$)



7.1.3.3

Práctica adicional
de evaluación de
una expresión dada de la forma:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

en que f representa una función polinomia
y $a \in \mathcal{R}$,
si se considera necesario.

7.1.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar,* de manera intuitiva, el límite de una sucesión dada;
- *evaluar* una expresión de la forma:

  $$\lim_{x \to a} f(x)$$

  en que f representa una función polinomia (continua) y $a \in \mathcal{R}$.

1.4

Pendiente y ángulo de dirección de una curva

82

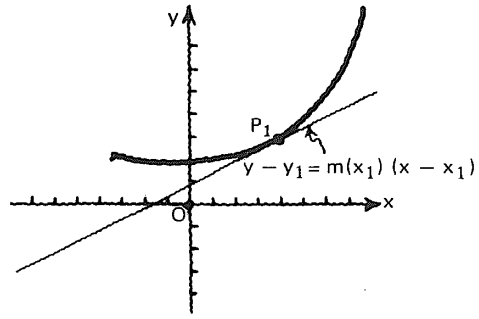
Regresemos a
nuestro problema
de las tangentes.

83

Hemos encontrado que:

la pendiente de la
recta tangente
a la curva $y = f(x)$
en el punto $P_1 = (x_1, y_1)$
está dada por la
expresión:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} \quad \Delta x_1 \neq 0$$



Ahora,
vamos a aplicar esto a
algunos casos particulares.

84

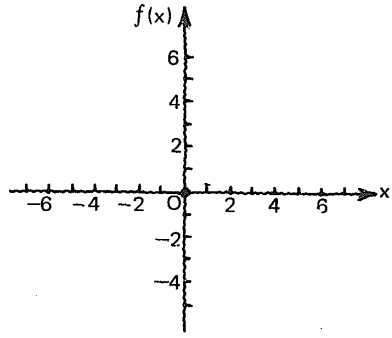
Sea la función
definida por la ecuación:

$f(x) = x^2 \qquad x \in \mathcal{R}$

Se requiere determinar
una
ecuación de la recta tangente a la curva
en el punto (1, 1).

85

Tracemos la gráfica de
$f(x) = x^2$

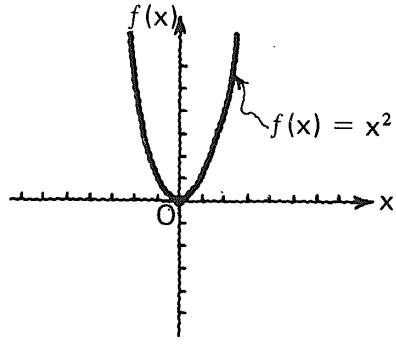


Respuesta
en el
cuadro siguiente

El punto (1, 1)
pertenece a la curva

$f(x) = x^2$

puesto que:



el par (1, 1) satisface
la ecuación

$f(x) = x^2$

Para $x = 1$ y $f(x) = 1$
se tiene:

$1 = (1)^2$
$1 = 1 \leftarrow$ **PCV**
proposición cerrada
verdadera

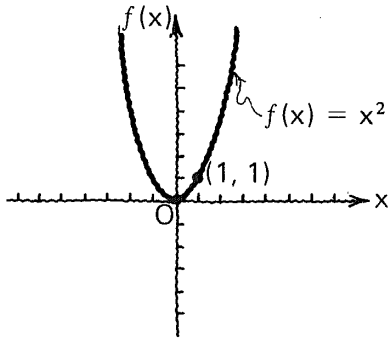
86

Ahora bien:

$f(x) = x^2$

$f(1) =$ [ ]

$f(1 + \Delta x_1) =$ [ ]



1

$(1 + \Delta x_1)^2$

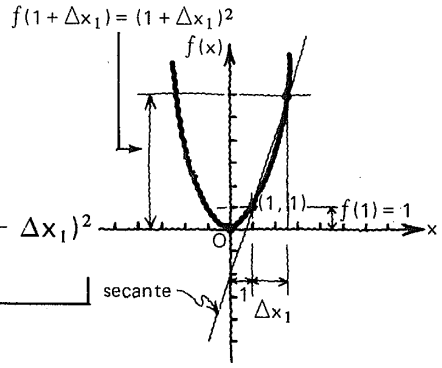
87

$f(x) = x^2$

$f(1) = 1$

$f(1 + \Delta x_1) = (1 + \Delta x_1)^2$

$f(1 + \Delta x_1) - f(1) =$ [ ]



$(1 + \Delta x_1)^2 - 1$

88

$f(x) = x^2$

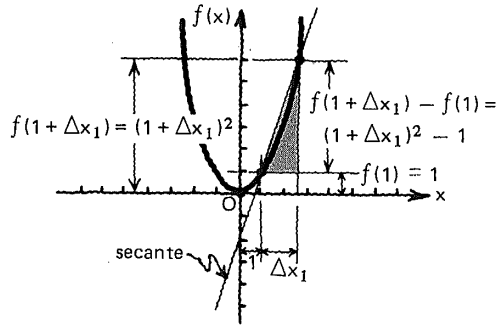
$f(1) = 1$

$f(1 + \Delta x_1) = (1 + \Delta x_1)^2$

$f(1 + \Delta x_1) - f(1) = (1 + \Delta x_1)^2 - 1$

Pendiente de la recta secante:

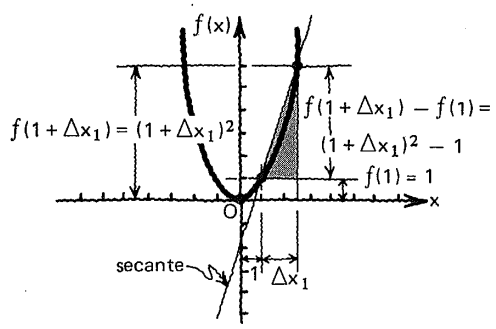
$$\frac{f(1+\Delta x_1) - f(1)}{\Delta x_1} = \frac{(1+\Delta x_1)^2 - 1}{\Delta x_1}$$



89

$$\frac{f(1+\Delta x_1)-f(1)}{\Delta x_1} = \frac{(1+\Delta x_1)^2-1}{\Delta x_1}$$

Simplificando el segundo miembro obtenemos la siguiente expresión para la **pendiente de la recta secante:**



$$\frac{f(1+\Delta x_1)-f(1)}{\Delta x_1} = \boxed{}$$

$$\frac{\cancel{1} + 2\Delta x_1 + \Delta x_1{}^2 - \cancel{1}}{\Delta x_1}$$

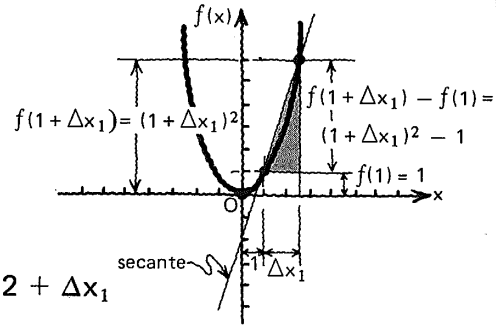
$$\frac{2\Delta x_1 + \Delta x_1{}^2}{\Delta x_1}$$

$$2 + \Delta x_1$$

90

Tomemos nota de esta expresión para la pendiente de la recta secante:

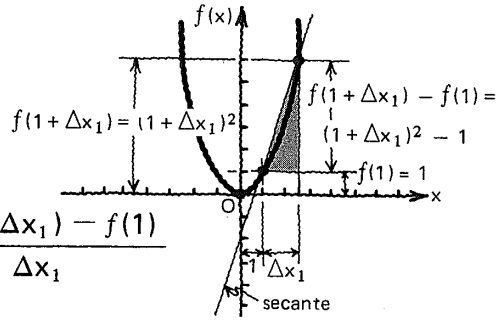
$$\frac{f(1+\Delta x_1)-f(1)}{\Delta x_1} = 2 + \Delta x_1$$



91

Ahora, la pendiente de la recta tangente será:

$$m_{(1)} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(1+\Delta x_1)-f(1)}{\Delta x_1}$$



o bien:

$$m_{(1)} = \lim_{\Delta x_1 \to \square} \boxed{}$$

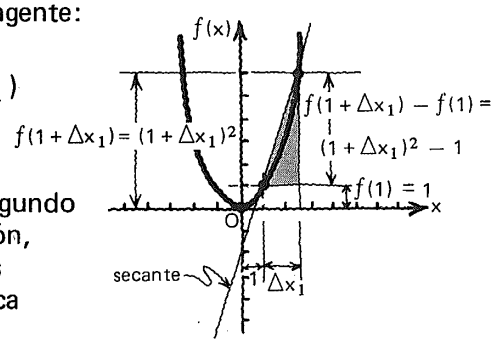
$2 + \Delta x_1$

0

92

Pendiente de la recta tangente:

$m_{(1)} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} (2 + \Delta x_1)$



Intentemos evaluar el segundo miembro de esta ecuación, de acuerdo con nuestras nociones intuitivas acerca de "límite":

$m_{(1)} =$ ⌊_____⌋

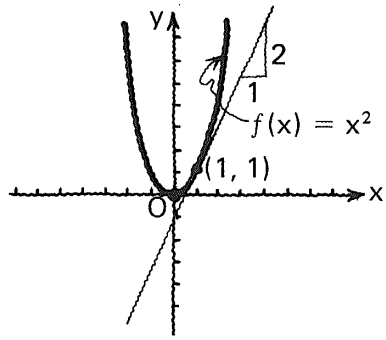
2

93

Pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto (1, 1):

$m_{(1)} = 2$

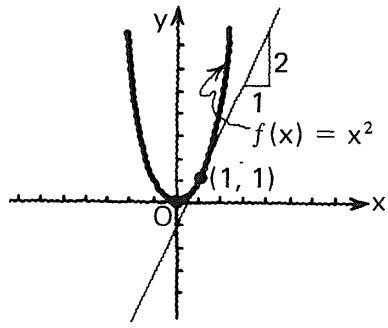
Observemos la verificación gráfica.



94

Una ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto (1, 1) es, entonces:

⌊_____⌋



$y - 1 = 2(x - 1)$

o bien:

$y = 2x - 1$

o bien:

$2x - y - 1 = 0$

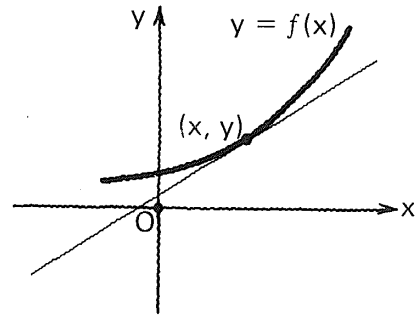
95

Podemos generalizar el procedimiento estudiado, si evaluamos el segundo miembro de la expresión:

$$m_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \neq 0$$

que nos da la pendiente de la tangente a la curva en un punto cualquiera (x, y), y sustituimos en la expresión resultante la abscisa del punto específico de la curva para el que deseamos conocer la pendiente.



96

Para la función previamente considerada, tenemos:

$$f(x) = x^2$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) =$ [ ]

$(x + \Delta x)^2$

97

$$f(x) = x^2$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) =$ [ ]

$(x + \Delta x)^2 - x^2$

98

$$f(x) = x^2$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$

↓

Expresión simplificada → [ ]

$\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}$

↓

$2x\Delta x + \Delta x^2$

99

$$f(x) = x^2$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$
$= 2x\Delta x + \Delta x^2$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ [ ]

$2x + \Delta x$

100

$$f(x) = x^2$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$
$= 2x\Delta x + \Delta x^2$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

PASO 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) =$ [ ]

$2x$

101

Estudiemos con atención este procedimiento y la interpretación geométrica dada en los dos cuadros siguientes.

$$f(x) = x^2$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$$
$$= 2x\Delta x + \Delta x^2$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

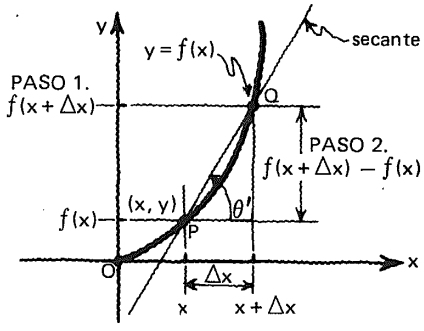
PASO 4. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Esta expresión nos da la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en un punto cualquiera de abscisa x.

102

PASO 3. Pendiente de la secante $\overleftrightarrow{PQ}$:

$$m'_{(x)} = \tan \theta' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



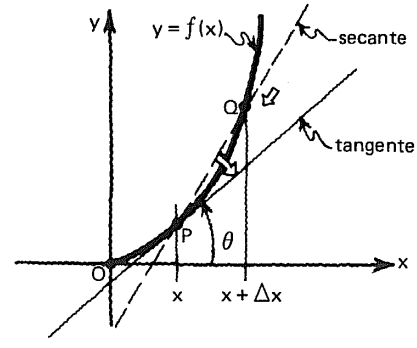
Véase cuadro siguiente.

103

PASO 4. Pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera (x, y) de la curva $y = f(x)$

$$m_{(x)} = \tan \theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Llamamos a θ
ángulo de dirección
o **ángulo de inclinación**
de la curva en el punto considerado.



104

Para la función $f(x) = x^2$
hemos obtenido la expresión

$$m_{(x)} = 2x$$

que nos da la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto cualquiera, de abscisa x.

Podemos hablar,
por razones de brevedad,
de
pendiente de la curva en un punto de abscisa x.

105

Si en la expresión $\mathbf{m_{(x)} = 2x}$

sustituimos
$x = 1$
obtenemos la **pendiente de la curva**
en el punto (1, 1):

$$m_{(1)} = \underline{\qquad\qquad}$$

2

resultado que habíamos obtenido anteriormente

106

$$\mathbf{m_{(1)}} = 2$$

La medida del
ángulo de inclinación
o ángulo de dirección de la curva $f(x) = x^2$
en el punto (1, 1) es:

$$\theta = \underline{\qquad\qquad}$$

$\theta = \text{arc tan } 2 \doteq 63^\circ\ 26'$

Para $0 \leqslant \theta < \pi$

107

Resumiendo, tenemos:

- Ecuación definitoria de la función:

$$y = x^2$$

- Pendiente de la curva en un punto cualquiera:

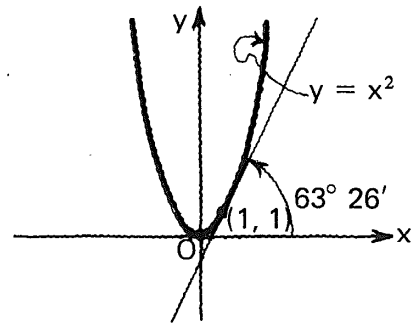
$$m_{(x)} = 2x$$

- Pendiente de la curva en el punto (1, 1):

$$m_{(1)} = 2$$

- Medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en (1, 1):

$$\theta \doteq 63° 26'$$



108

Ahora se requiere determinar para la función $y = x^3$ $x \in \mathbb{R}$

1. Una ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera.
2. La pendiente de la curva en el punto (2, 8).
3. Una ecuación de la tangente a la curva en el punto (2, 8).
4. La medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto (2, 8).

109

Función dada: $y = x^3$ o $f(x) = x^3$

PASO 1. $f(x + \Delta x) =$ [ ]

$(x + \Delta x)^3$

110

$$f(x) = x^3$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) =$ [ ]

$(x + \Delta x)^3 - x^3$

111

$$f(x) = x^3$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3$

Expresión simplificada → [ ]

$\cancel{x^3} + 3x^2\,\Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x^3}$

$3x^2\,\Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$

112

$$f(x) = x^3$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3$
$= 3x^2\,\Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ [ ]

$3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2$

113

$$f(x) = x^3$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3$$
$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

PASO 4. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$3x^2$

114

Estudiar con atención.

$$f(x) = x^3$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3$$
$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

PASO 4. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3x^2$$

115

Podemos entonces, escribir esta expresión para la pendiente de la curva $f(x) = x^3$ en un punto cualquiera:

$\boxed{\qquad\qquad}$

$m_{(x)} = 3x^2$

116

$m_{(x)} = 3x^2$

Pendiente de la curva en el punto (2, 8):

$m_{(2)} =$ ⌊_____⌋

$3(2)^2$

↓

12

117

$m_{(2)} = 12$

Una ecuación de la tangente a la curva en el punto (2, 8) es:

⌊_____⌋

$y - 8 = 12(x - 2)$
o
$y = 12x - 16$
o
$12x - y - 16 = 0$

118

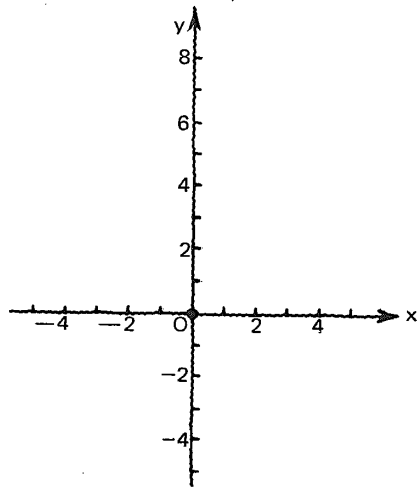
Medida del ángulo de inclinación
o
ángulo de dirección
de la curva $f(x) = x^3$
en el punto (2, 8):

$\theta =$ ⌊_____⌋

arc tan $12 \doteq 85° 14'$
para $0 \leqslant \theta < \pi$

119

Representación gráfica



Respuesta en el cuadro siguiente

Resumen:

- Ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera:

$$m_{(x)} = 3x^2$$

- Pendiente de la curva en (2, 8):

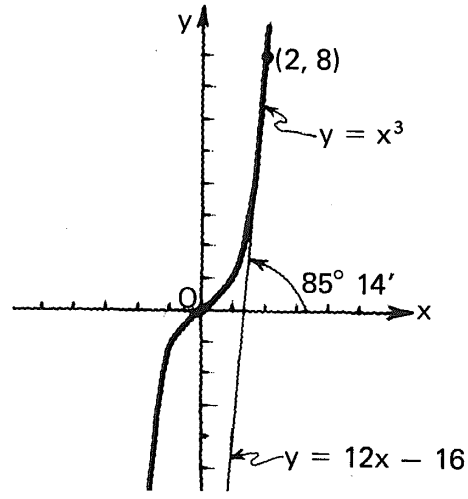
$$m_{(2)} = 12$$

- Una ecuación de la tangente a la curva en (2, 8):

$$y = 12x - 16$$

- Medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en (2, 8):

$$\theta \doteq 85° \ 14$$



120

Para la función $y = 2x + 3$ $x \in \mathbb{R}$

se requiere conocer:

1. Una ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera.
2. La pendiente de la curva en el punto de abscisa 2.
3. Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2.
4. La medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto de abscisa 2.

121

Función dada: $f(x) = 2x + 3$

PASO 1. $f(x + \Delta x) =$ [ ]

$2(x + \Delta x) + 3$

122

$f(x) = 2x + 3$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) + 3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) =$ [ ]

$2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)$

123

$f(x) = 2x + 3$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) + 3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ [ ]

$\dfrac{2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)}{\Delta x}$

124

$$f(x) = 2x + 3$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) + 3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)}{\Delta x}$

Expresión simplificada: ➔ [ ]

$\dfrac{2x + 2\Delta x + 3 - 2x - 3}{\Delta x}$

2

125

$$f(x) = 2x + 3$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) + 3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)}{\Delta x}$

$= 2$

PASO 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2 =$ [ ]

2

126

Estudiar con atención.

$$f(x) = \mathbf{2x + 3}$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) + 3$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)}{\Delta x} = 2$

PASO 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2 = \mathbf{2}$

127

Una ecuación de la pendiente a la curva $y = 2x + 3$ en uno cualquiera de sus puntos es:

$m_{(x)} = 2$

128

La pendiente de la curva $y = 2x + 3$ en un punto de abscisa 2 es:

$m_{(2)} = 2$

129

Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2 es:

En $y = 2x + 3$
para $x = 2$
se tiene: $y = 2(2) + 3 = 7$

Entonces:
una ecuación de la recta que contiene al punto (2, 7) y cuya pendiente es 2, puede escribirse así:

$y - 7 = 2(x - 2)$

o así: $y = 2x + 3$

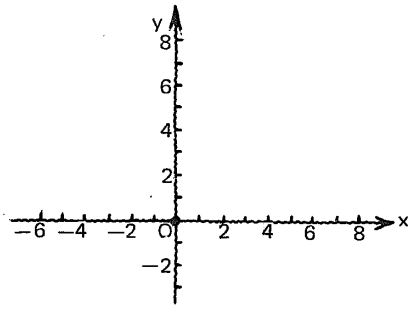
130

El ángulo de inclinación o
ángulo de dirección
de la curva en el punto
de abscisa 2 tiene por medida:

$\theta = \arctan 2 \doteq 63° 26'$
para $0 \leqslant \theta < \pi$

131

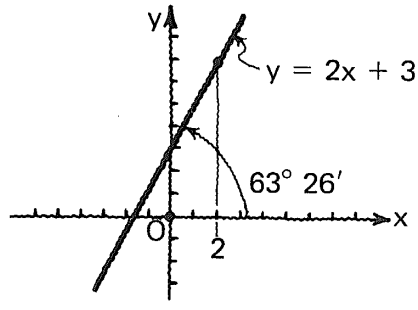
Representación gráfica
e
interpretación;



Respuesta
en el
cuadro siguiente

- La gráfica de $y = 2x + 3$ es una **recta.***
- La pendiente de una recta es constante para todos sus puntos.
- La tangente a la recta en un punto cualquiera coincide con la recta misma.
- La medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de una recta es también constante para todos los puntos de la recta.

Comparar con lo que sucede
con una curva no recta.



* Recordemos que el término **curva,** tal como lo hemos definido, se aplica también a la **recta.**

132

Se requiere determinar
para la función

$$y = -\frac{x^2}{4} + x + 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Una ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera.
2. La pendiente de la curva en el punto de abscisa 2.
3. Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2.
4. La medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto de abscisa 2.

133

Función dada: $f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$

PASO 1. $\square = \square$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

134

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = -\frac{(x + \Delta x)^2}{4} + (x + \Delta x) + 2$

PASO 2. $\square = \square$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

135

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = -\frac{(x + \Delta x)^2}{4} + (x + \Delta x) + 2$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = -\frac{(x + \Delta x)^2}{4} + (x + \Delta x) + 2 - (-\frac{x^2}{4} + x + 2)$

PASO 3. [ ] = [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

136

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$$

PASO 1. $f(x+\Delta x) = -\frac{(x+\Delta x)^2}{4} + (x+\Delta x) + 2$

PASO 2. $f(x+\Delta x) - f(x) = -\frac{(x+\Delta x)^2}{4} + (x+\Delta x) + 2 - \left(-\frac{x^2}{4} + x + 2\right)$

PASO 3. $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{\frac{(x+\Delta x)^2}{4} + (x+\Delta x) + 2 - (-\frac{x^2}{4} + x + 2)}{\Delta x}$

Expresión simplificada: → [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{-\frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2}{4} + x + \Delta x + 2 + \frac{x^2}{4} - x - 2}{\Delta x}$$

$$\frac{-\frac{x^2}{4} - \frac{x\Delta x}{2} - \frac{\Delta x^2}{4} + x + \Delta x + 2 + \frac{x^2}{4} - x - 2}{\Delta x}$$

$$\frac{-\frac{x\Delta x}{2} - \frac{\Delta x^2}{4} + \Delta x}{\Delta x}$$

$$-\frac{x}{2} - \frac{\Delta x}{4} + 1$$

137

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = -\frac{(x + \Delta x)^2}{4} + (x + \Delta x) + 2$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = -\frac{(x + \Delta x)^2}{4} + (x + \Delta x) + 2 - \left(-\frac{x^2}{4} + x + 2\right)$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{x}{2} - \frac{\Delta x}{4} + 1$$

PASO 4. [ ] = [ ] = [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = -\frac{(x + \Delta x)^2}{4} + (x + \Delta x) + 2$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = -\frac{(x + \Delta x)^2}{4} + (x + \Delta x) + 2 - \left(-\frac{x^2}{4} + x + 2\right)$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{x}{2} - \frac{\Delta x}{4} + 1$$

PASO 4 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{x}{2} - \frac{\Delta x}{4} + 1\right) = -\frac{x}{2} + 1$$

138

Ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera:

[ ]

$$m_{(x)} = -\frac{x}{2} + 1$$

139

Pendiente de la curva en el punto de abscisa 2

$$-\frac{2}{2}+1=-1+1=0$$

$$m_{(2)}=0$$

140

Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2:

En $y=-\frac{x^2}{4}+x+2$

si $x=2$

$$y=-\frac{(2)^2}{4}+2+2=3$$

Para la recta que pasa por (2, 3) con m = 0:

$y-3=0(x-2)$
o
$y-3=0$
o
$y=3$

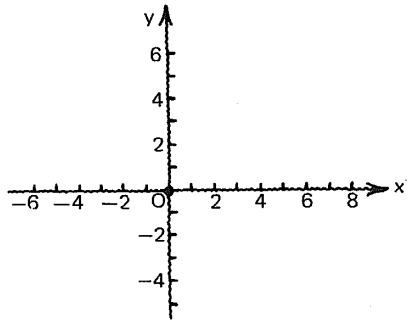
141

Medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto de abscisa 2:

$\theta = \arctan 0 = 0°$
para $0 \leqslant \theta < \pi$

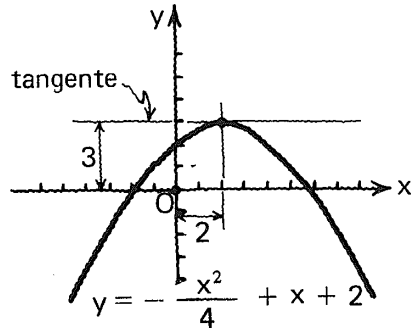
142

Representación gráfica.



Respuesta en el cuadro siguiente

- En el punto de abscisa 2 la **pendiente** de la curva es **nula**;
- La **tangente** a la curva es **horizontal**;
- El ángulo de inclinación o de dirección tiene una medida de 0°
- Podemos ver que, para $x = 2$ $y = f(x)$ adquiere su valor máximo (3).



143

Para la función

$$y = 2\sqrt{x-3} \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 3$$

se requiere:

1. Una ecuación de la pendiente a la curva en un punto cualquiera.
2. La pendiente de la curva en el punto de abscisa 3.
3. Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 3.
4. La medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto de abscisa 3.

144

Función dada: $f(x) = 2\sqrt{x-3}$

PASO 1. $\square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

145

$f(x) = 2\sqrt{x-3}$

PASO 1. $f(x+\Delta x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3}$

PASO 2. $\square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

146

$f(x) = 2\sqrt{x-3}$

PASO 1. $f(x+\Delta x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3}$

PASO 2. $f(x+\Delta x) - f(x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}$

PASO 3. $\square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

147

$$f(x) = 2\sqrt{x-3}$$

PASO 1. $f(x+\Delta x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3}$

PASO 2. $f(x+\Delta x) - f(x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}$

PASO 3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}}{\Delta x}$

PASO 4. $\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = 2\sqrt{x-3}$$

PASO 1. $f(x+\Delta x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3}$

PASO 2. $f(x+\Delta x) - f(x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}$

PASO 3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}}{\Delta x}$

PASO 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}}{\Delta x}$

Debemos observar que no es posible la evaluación del segundo miembro en la forma estudiada, ya que para $\Delta x = 0$, la expresión no se define.

148

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}}{\Delta x} = ?$$

Vamos a intentar transformar la expresión:

$$\frac{2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}}{\Delta x}$$

mediante la racionalización del numerador:

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{\left(2\sqrt{x+\Delta x-3}-2\sqrt{x-3}\right)\left(2\sqrt{x+\Delta x-3}+2\sqrt{x-3}\right)}{\Delta x\left(2\sqrt{x+\Delta x-3}+2\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\frac{4(x+\Delta x-3)-4(x-3)}{\Delta x\left(2\sqrt{x+\Delta x-3}+2\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\frac{4x+4\Delta x-12-4x+12}{\Delta x\left(2\sqrt{x+\Delta x-3}+2\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\frac{4\Delta x}{\Delta x\left(2\sqrt{x+\Delta x-3}+2\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\frac{4}{2\left(\sqrt{x+\Delta x-3}+\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{x+\Delta x-3}+\sqrt{x-3}}$$

149

Entonces escribimos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sqrt{x+\Delta x-3}-2\sqrt{x-3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+\Delta x-3}+\sqrt{x-3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

150

Estudiar con atención.

$$f(x) = 2\sqrt{x-3}$$

PASO 1. $f(x+\Delta x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3}$

PASO 2. $f(x+\Delta x) - f(x) = 2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}$

PASO 3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}}{\Delta x}$

PASO 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sqrt{x+\Delta x-3} - 2\sqrt{x-3}}{\Delta x}$

transformación mediante la racionalización del numerador

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

151

Ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera:

$$m_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

152

Pendiente de la curva en el punto de abscisa 3.

$$m_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3-3}} = \frac{1}{0}$$

(número no definido que podemos representar así: ∞)

153

Atención.

Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 3.

Podemos observar que se trata de una recta paralela al eje de las "y" con abscisa 3, por lo tanto, una de sus ecuaciones puede ser escrita así:

$x = 3$ (o $x - 3 = 0$)

154

Atención.

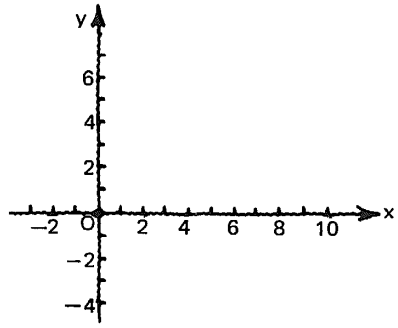
Medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto de abscisa 3:

90°

para $0 \leqslant \theta < \pi$

155

Representación gráfica e interpretación de los resultados.

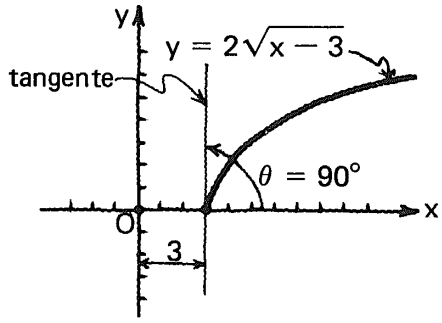


Respuesta en el cuadro siguiente

Para el punto de abscisa 3, la pendiente de la curva está dada por una expresión no definida de la forma:

$$\frac{c}{0}$$

que sabemos que corresponde a una recta paralela al eje y.



156

Para la función $y = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$ determinar:

1. Una ecuación de la pendiente en un punto cualquiera.
2. La pendiente de la curva en el punto de abscisa -1.
3. Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa -1.
4. La medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto de abscisa -1.

157

Función dada: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

PASO 1. $\square \equiv \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

158

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$

PASO 2. $\square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

159

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x}$

PASO 3. $\square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x}$$

Expresión simplificada: [ ]

$$\frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)\Delta x}$$

$$\frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x}$$

$$-\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

160

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

PASO 4. [ ] = [ ]

↓

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

PASO 1. $$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

PASO 2. $$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

PASO 3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

PASO 4. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

161

Ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera:

$$m_{(x)} = -\frac{1}{x^2}$$

162

La pendiente de la curva en el punto de abscisa -1.

$$m_{(-1)} = -1$$

163

Una ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa -1.

Para $x = -1$
$y = -1$

Entonces:

$y + 1 = -(x + 1)$
o
$y = -x - 2$
o
$x + y + 2 = 0$

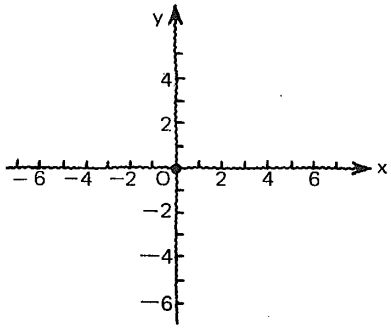
164

Medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en el punto de abscisa -1:

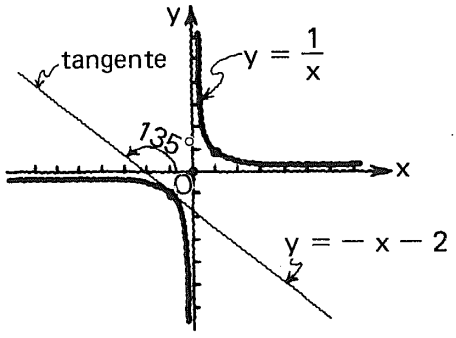
$\theta = \arctan(-1) = 135°$
para $0 \leqslant \theta < \pi$

165

Representación gráfica.



Respuesta en el cuadro siguiente



7.1.4.1

Práctica adicional de determinación para una función algebraica sencilla dada en la forma $y = f(x)$:

1. una ecuación de la pendiente a la curva en un punto cualquiera
2. la pendiente de la curva en un punto dado
3. una ecuación de la tangente a la curva en un punto dado
4. la medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en un punto dado mediante la aplicación de la "regla de los 4 pasos";

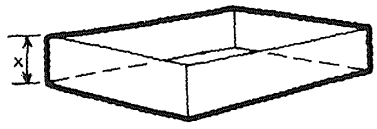
si se considera necesario.

166

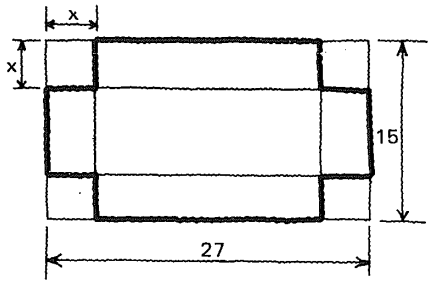
Regresemos a nuestro problema de la caja de cartón que hemos planteado al principio de este módulo.

167

Buscamos el valor de x que hace que el volumen de la caja sea máximo.



Hemos establecido la siguiente función para el volumen:



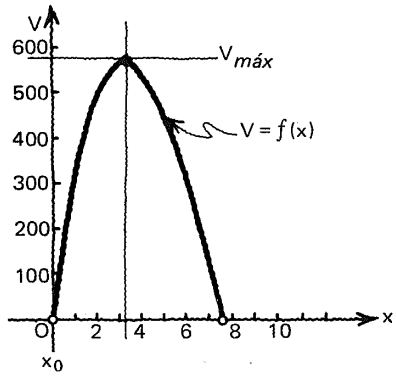
$$V = (15 - 2x)(27 - 2x)x$$

$0 < x < 7.5$

168

Esta es
la gráfica
de la función
volumen.

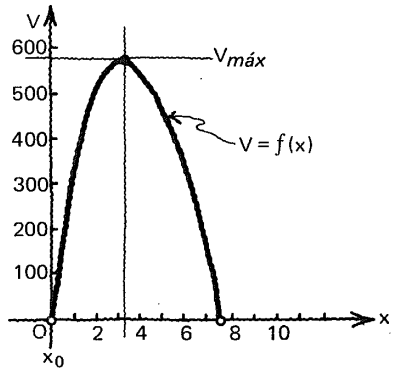
Nuestro problema
consiste en
determinar el
punto en que
la pendiente de la
curva es nula,
es decir,
donde la tangente
a la curva es horizontal.



169

Empezaremos
por buscar
una ecuación
para la pendiente
de la curva
en un punto cualquiera.

Utilizaremos
el **procedimiento de los**
4 pasos,
que hemos estudiado.



170

$$V = (15 - 2x)(27 - 2x)x$$

Efectuemos el producto indicado en el
segundo miembro, ordenando el polinomio
resultante según las potencias descendentes de x:

$V = 4x^3 - 84x^2 + 405x$

171

Función dada: $f(x) = 4x^3 - 84x^2 + 405x$

PASO 1. [ ] = [ ]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

172

$$f(x) = 4x^3 - 84x^2 + 405x$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^3 - 84(x + \Delta x)^2 + 405(x + \Delta x)$

PASO 2. [ ] = [ ]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$f(x) = 4x^3 - 84x^2 + 405x$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^3 - 84(x + \Delta x)^2 + 405(x + \Delta x)$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 4(x + \Delta x)^3 - 84(x + \Delta x)^2 + 405(x + \Delta x) - (4x^3 - 84x^2 + 405x)$

Expresión simplificada: → [ ]

$12x^2\,\Delta x + 12x\,\Delta x^2 + 4\,\Delta x^3 - 168x\,\Delta x - 84\,\Delta x^2 + 405\,\Delta x$

173

$$f(x) = 4x^3 - 84x^2 + 405x$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^3 - 84(x + \Delta x)^2 + 405(x + \Delta x)$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 4(x + \Delta x)^3 - 84(x + \Delta x)^2 + 405(x + \Delta x) - (4x^3 - 84x^2 + 405x)$

$$12x^2\Delta x + 12x\Delta x^2 + 4\Delta x^3 - 168x\Delta x - 84\Delta x^2 + 405\Delta x$$

PASO 3. $\square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

174

$$f(x) = 4x^3 - 84x^2 + 405x$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^3 - 84(x + \Delta x)^2 + 405(x + \Delta x)$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 12x^2\Delta x + 12x\Delta x^2 + 4\Delta x^3 - 168x\Delta x - 84\Delta x^2 + 405\Delta x$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 12x^2 + 12x\Delta x + 4\Delta x^2 - 168x - 84\Delta x + 405$

PASO 4. $\square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = 4x^3 - 84x^2 + 405x$$

PASO 1. $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^3 - 84(x + \Delta x)^2 + 405(x + \Delta x)$

PASO 2. $f(x + \Delta x) - f(x) = 12x^2\Delta x + 12x\Delta x^2 + 4\Delta x^3 - 168x\Delta x - 84\Delta x^2 + 405\Delta x$

PASO 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 12x^2 + 12x\Delta x + 4\Delta x^2 - 168x - 84\Delta x + 405$

PASO 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \mathbf{12x^2 - 168x + 405}$

175

Ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera:

$$m_{(x)} = 12x^2 - 168x + 405$$

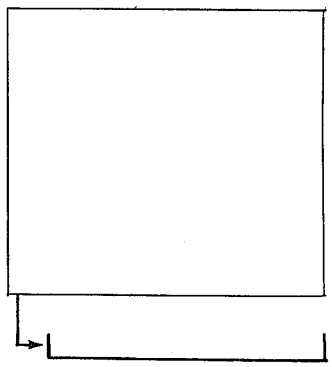
Para el punto en que $V = f(x)$ es máximo, la pendiente debe ser igual a cero, es decir:

$$12x^2 - 168x + 405 = 0$$

176

Resolvamos, para x la ecuación cuadrática resultante,

$$12x^2 - 168x + 405 = 0$$



$$x = \frac{168 \pm \sqrt{28\,224 - 19\,440}}{24}$$

$$x \doteq \frac{168 \pm 93.72}{24}$$

$x_1 \doteq 10.905$

$x_2 \doteq 3.095$

Como x_1 no está en el dominio de la función, entonces:

$x_0 \doteq 3.095$

177

$$V = 4x^3 - 84x^2 + 405x$$

Para $x_0 \doteq 3.095$

$V_{máx} =$ _____

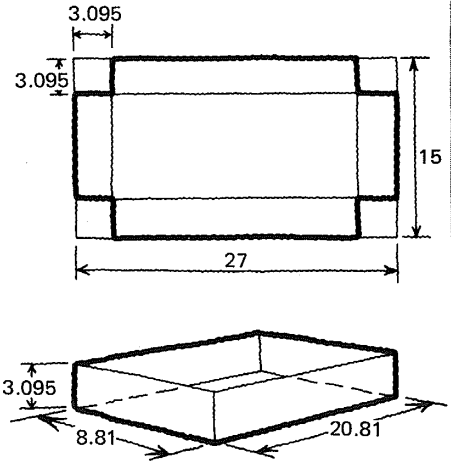
567.43

178

El problema ha quedado resuelto.

Los cuadrados por recortar deben tener **3.095 cm** por lado.

La caja resultante tendrá un volumen de **567.43 cm^3** que es el máximo posible para las dimensiones de la pieza de cartón utilizada.



179

En los módulos siguientes buscaremos:

agilizar el procedimiento estudiado
y
ampliar su campo de aplicación

7.1.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar,* para una función algebraica sencilla dada:
  - — una ecuación de la pendiente de la curva en un punto cualquiera;
  - — la pendiente de la curva en un punto dado;
  - — una ecuación de la tangente a la curva en un punto dado, y
  - — la medida del ángulo de inclinación o ángulo de dirección de la curva en un punto dado, utilizando el procedimiento de los 4 pasos para la evaluación de la expresión:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$